

Chapitre 3

Éléments finis structuraux

3.1 Introduction

Dans le Chapitre 2, on a vu comment calculer la répartition des efforts internes dans une structure composée d'un assemblage de poutres. Les forces étaient les inconnues principales du problème et il était possible de calculer *a posteriori* les déplacements de la structure.

Il est aussi possible d'utiliser directement les déplacements (des noeuds) de la structure comme inconnues. L'avantage de la méthode des déplacements est qu'elle est plus systématique et donc plus adaptée à un traitement informatique.

La méthode des déplacements est historiquement plus récente que la méthode des forces. En fait, il a fallu attendre 1920 pour voir apparaître l'idée d'étudier des assemblages de poutres en prenant comme inconnue les déplacements comme inconnues principales. Il est certain que, dans sa phase initiale, le développement de la méthode a été freiné par la taille des systèmes d'équations linéaires pouvant être résolus manuellement. Une technique de relaxation développée par Cross (1932) permit toutefois d'appliquer la méthode à des cas relativement complexes et s'imposa pendant plus de 25 ans comme la méthode principale d'analyse structurale. L'avenue des ordinateurs dans les années 1960 permit le traitement de problèmes jusqu'alors inabordables.

La formulation matricielle de la méthode des déplacement est en fait l'ancêtre de la méthode des éléments finis. Il est difficile de dire quand et où les éléments finis ont été découverts, bien qu'il soit clair que des papiers importants aient été publiés dans les années 1940 (Courant). C'est dans le milieu des années 1950 que les premières publications de base sur la mécanique structurale sont apparues. En particulier, il faut mentionner la série célèbre d'articles par Argyris et Kelsey dans la période 1954-55 (qui a été republiée plus tard sous la forme d'un livre) ainsi que le fameux "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures," par Turner, Clough, Martin et Topp. Les éléments finis sont utilisés aujourd'hui dans la plupart des domaines de l'ingénierie, depuis les calculs du rayonnement électromagnétique des antennes jusqu'aux interactions fluides structures entre la mer et un voilier.



FIG. 3.1 – Maillage de la structure d'un trimaran avec, en superposition, le champ de contraintes de Von-Mises.

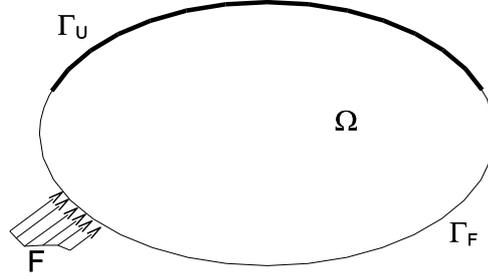
C'est dans le cadre de la mécanique des structures que la méthode des éléments finis a été découverte et, encore aujourd'hui, c'est dans ce domaine qu'elle est la plus utilisée et où la quantité de travaux de recherche est la plus importante (Figure 3.1).

Dans le cadre de ce cours, nous allons étudier les éléments structuraux de base dans le cadre de la méthode des éléments finis. On présentera les éléments de structure discrets comme les barres et les poutres (modèles de Bernoulli et de Timoshenko). On étudiera ensuite les éléments de structures continus : les membranes, les structures 2D en état plan de contraintes, les plaques et finalement une introduction aux éléments finis de coques. Tous ces développements se feront dans le cadre de l'élasticité linéaire c'est-à-dire en utilisant la loi de comportement la plus simple.

3.2 Formulation variationnelle en déplacements

3.2.1 Formulation continue

La forme forte (ou locale) du problème de l'élasticité linéaire s'écrit comme suit. Il s'agit de trouver les champs de déplacement $u_i(\mathbf{x})$, de déformations $\epsilon_{ij}(\mathbf{x})$

FIG. 3.2 – Domaine Ω et sa frontière divisée en deux parties disjointes Γ_U et Γ_F

et de contraintes $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$ solution des équations suivantes :

$$\text{FF} \begin{cases} \partial_j \sigma_{ij} + f_i = 0 \text{ sur } \Omega & \text{(ff.1)} \\ \epsilon_{ij} = 1/2 (\partial_i u_j + \partial_j u_i) = u_{(i,j)} & \text{(ff.2)} \\ \sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} & \text{(ff.3)} \\ u_i = U_i \text{ sur } \Gamma_U & \text{(ff.4)} \\ \sigma_{ij} n_j = F_i \text{ sur } \Gamma_F & \text{(ff.5)} \end{cases}$$

Les équation (ff.1) sont les équations d'équilibre entre contraintes (efforts intérieurs) et forces extérieures f_i , les équations (ff.2) expriment la compatibilité avec hypothèse de petites déformations et (ff.3) est une loi de comportement de type élastique linéaire. Dans le cas isotrope, la loi se simplifie comme

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{mm} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

avec les coefficients de Lamé

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

E et ν sont le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau. On a finalement les conditions aux limites (ff.4) de types déplacements imposés U_i et tractions de surfaces imposées F_i (ff.5).

L'idée d'une méthode en déplacements est de supposer que le comportement et la compatibilité sont assurées *a priori*. Pour cela, on choisit un champ de déplacement dans un espace fonctionnel suffisamment continu (appelons le U , sa nature exacte est de peu d'intérêt ici) qui vérifie *a priori* les conditions aux limites dites essentielles (ff.4). On choisit donc $\mathbf{u} \in \mathcal{U} \subseteq U$ avec

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in U, u_i = U_i \text{ sur } \Gamma_U\}.$$

Un champ $\mathbf{u} \in \mathcal{U} \subseteq U$ est dit *cinématiquement admissible*. On introduit un deuxième espace \mathcal{U}_0

$$\mathcal{U}_0 = (\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in U, u_i = 0 \text{ sur } \Gamma_U).$$

des fonctions à valeurs vectorielles dont la trace est nulle sur Γ_U .

Choisissons donc les inconnues de déplacement $\mathbf{u} \in U$ et munissons nous d'un ensemble de fonctions test $\mathbf{v} \in \mathcal{U}_0$. En choisissant un champ \mathbf{u} , cinématiquement admissible, seules les équations (ff.1) et (ff.5) sont à vérifier *a posteriori* i.e. par un calcul. Pour ce faire, on construit une forme variationnelle de l'équation d'équilibre (ff.1) en multipliant (ff.1) par chacune des fonctions test \mathbf{v} et en intégrant le tout sur le domaine Ω :

$$\int_{\Omega} (\partial_j \sigma_{ij} + f_i) v_i dv = 0 \quad \forall v_i \in \mathcal{U}_0. \quad (3.1)$$

Après avoir intégré (3.1) par parties, on obtient

$$\int_{\Omega} (-\sigma_{ij} \partial_j v_i + f_i v_i) dv + \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j v_i ds = 0 \quad \forall v_i \in \mathcal{U}_0. \quad (3.2)$$

Décomposons maintenant l'intégrale de surface dans (3.2) en deux parties :

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j v_i ds = \underbrace{\int_{\Gamma_U} \sigma_{ij} n_j v_i ds}_{v_i|_{\Gamma_U}=0} + \underbrace{\int_{\Gamma_F} \sigma_{ij} n_j v_i ds}_{\sigma_{ij} n_j|_{\Gamma_F}=F_i} \quad (3.3)$$

En tenant compte du comportement (ff.3) ainsi que du résultat classique

$$\sigma_{ij} \partial_j v_i = \sigma_{ij} \partial_j v_{(i,j)},$$

on obtient la formulation variationnelle en déplacements :

$$\int_{\Omega} (-u_{(i,j)} c_{ijkl} v_{(k,l)} + f_i v_i) dv + \int_{\Gamma_F} F_i v_i ds = 0 \quad \forall v_i \in \mathcal{U}_0. \quad (3.4)$$

L'écriture des équations sous la forme (3.4) est remarquable à plus d'un point de vue. L'équation (3.4) remplace les 5 équations (ff.1-5) de la formulation forte : elle contient les conditions aux limites et les équations différentielles en une seule expression. Les conditions limites cinématiques (ff.4) sont prises en compte *a priori* par le choix d'un champ de déplacements cinématiquement admissible. Les conditions limites (ff.4) sont dites *essentiels*. Les conditions aux limites (ff.5) sont prises en compte dans le calcul, elles sont vérifiées *a posteriori*. Elles sont appelées conditions limites *naturelles*.

Notons qu'il existe des formulations basées sur la définition d'un champ de contraintes statiquement admissible c'est-à-dire vérifiant (ff.1) *a priori*. Dans le cas d'une telle approche avec un champ de contraintes statiquement admissibles, les conditions aux limites (ff.4) sont naturelles et les conditions aux limites (ff.5) sont essentielles. Les formulations en contraintes sont beaucoup plus complexes à implémenter que les formulations en déplacements car il est difficile de construire *a priori* un champ de déplacements vérifiant l'équilibre (ff.1).

3.3 Éléments finis structuraux

La forme (3.4) elle sert de base à la plupart des méthodes numériques classiques. La méthode des éléments finis n'échappe pas à cette règle.

La méthode des éléments finis est caractérisée par l'introduction d'une double discrétisation. La structure est décomposée en éléments géométriques, en général de forme simple : lignes, triangles, quadrangles, tétraèdres, hexaèdres, prismes ou pyramides. Le maillage est l'union des éléments géométriques :

$$\mathcal{T} = \bigcup_e \Omega^e \quad (3.5)$$

En fonction du modèle structural que l'on désire utiliser, le maillage sera composé d'éléments unidimensionnels (barres, poutres, cables), bidimensionnels (membranes, plaques, coques) ou tridimensionnels (éléments volumiques). La Figure 3.3 montre quelques exemples de maillages. Notons qu'il est possible de définir des structures composées d'une mixture d'éléments 1D et 2D, par exemple un ensemble de plaques raidies par des poutres.

La deuxième étape consiste approximer les composantes u_i du déplacement \mathbf{u} sur chaque élément Ω^e du maillage en utilisant un nombre fini de fonctions de base :

$$u_i = \sum_{A=1}^n N_A u_{iA} \quad (3.6)$$

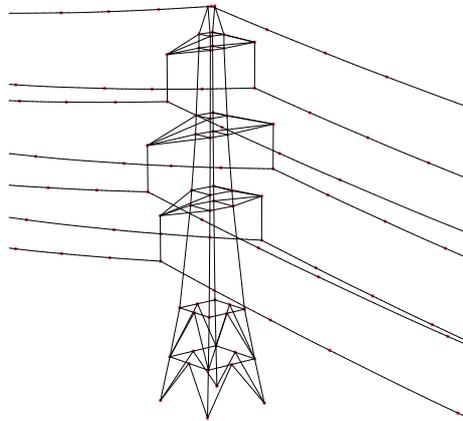
où $N_A(\mathbf{x})$ est une fonction de base ou fonction de forme et où u_{iA} est un coefficient inconnu ou degré de liberté. Les degrés de liberté sont souvent liés aux valeurs de u_i aux noeuds du maillage mais ceci est loin de constituer une règle générale. Notons que, dans (3.6), on a supposé que chaque composante u_i du vecteur déplacement \mathbf{u} était approximé en utilisant la même base ce qui est, la aussi, loin d'être général.

3.4 Éléments unidimensionnels

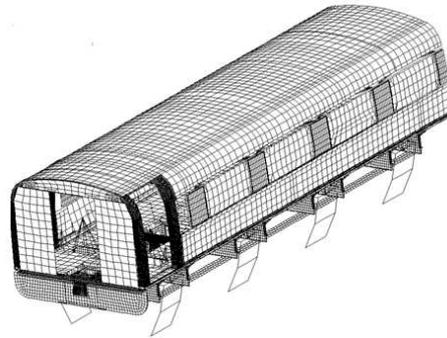
Dans cette section, on considère des structures formées d'éléments constitutifs unidimensionnels connectés ensemble en une série de points appelés noeuds de la structure.

Il est naturel de définir un système d'axes local lié à l'élément unidimensionnel (Figure 3.4). Les variables munies d'un prime comme u'_x sont évaluées dans le système d'axes local.

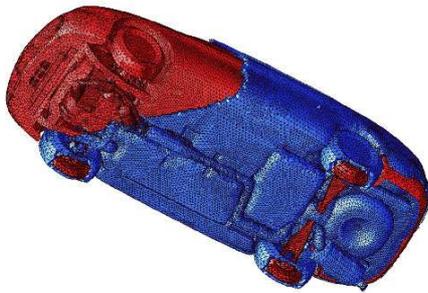
Dans tous les éléments de structure unidimensionnels, on utilise l'hypothèse d'état uniaxial de contraintes, i.e. $\sigma'_{22} = \sigma'_{33} = 0$. Cette hypothèse sera toujours en contradiction avec les hypothèses cinématiques. En effet, à moins que le coefficient de Poisson ν du matériau ne soit nul, aucun des σ'_{ii} n'est nul. La justification d'une telle théorie est son grand intérêt dans les problèmes pratiques de l'ingénieur. Aucune théorie de barres, poutres ou plaques n'est à la fois cohérente avec le modèle tridimensionnel et simple en pratique.



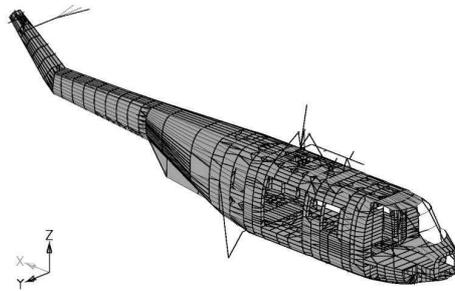
Maillage 1D d'un pylône.



Maillage coque d'une rame de métro.



Maillage 3D d'une voiture.



Maillage structural d'un hélicoptère.

FIG. 3.3 – Maillages

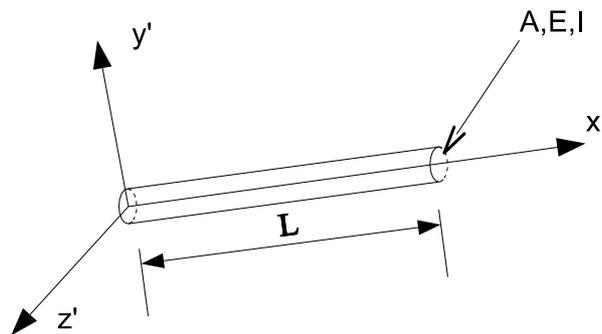


FIG. 3.4 – Système d'axes lié à la poutre.

Les différents éléments structuraux unidimensionnels peuvent être regroupés en différentes catégories en fonction de la façon dont on construit le champ de déplacement c'est-à-dire en fonction des hypothèses cinématiques. En général, on construit le champ de déplacement à partir de la valeur des déplacements aux noeuds de la structure. Connaissant ceux-ci, on approxime les déplacements à l'intérieur des éléments structuraux en utilisant (3.6).