

## Chapitre 2

# La méthode des Coupures.

### 2.1 Introduction

La méthode des Coupures appartient à la catégorie plus générale dite *des forces*. Dans cette méthode d'analyse des structures hyperstatiques, les inconnues principales sont constituées par des grandeurs statiques (efforts internes et/ou efforts de liaison). Cette méthode peut être à une large gamme de structures. L'exposé présenté ici est délibérément restreint à l'analyse d'ossatures planes et spatiales à noeuds rigides. La notion d'indétermination statique (degré d'hyperstaticité) sera précisée plus loin, tant qualitativement que quantitativement. Il importe toutefois de noter dès maintenant la différence fondamentale, déjà rencontrée, entre une structure statiquement déterminée (ou *isostatique*) et une structure statiquement indéterminée (ou *hyperstatique*).

L'étude d'un système isostatique est accessible au départ des seules équations d'équilibre de la statique tandis que la détermination des efforts internes et/ou des efforts de liaison dans un système hyperstatique réclame le recours supplémentaire aux équations de compatibilité. Ce sont précisément ceux-ci qui nous permettront d'évaluer les inconnues hyperstatiques. Rappelons, par comparaison, qu'une méthode de type *déplacement* (telle que la méthode des éléments finis) s'appuie sur la détermination du degré d'indétermination cinématique, que les inconnues principales sont constituées par des grandeurs cinématiques et que ceux-ci s'obtiennent par résolution d'un système d'équations d'équilibre. On peut donc établir l'analogie suivante :

Méthode	Inconnues	Équations
Des Forces	Statiques	De compatibilité
Des Déplacements	Cinématiques	D'équilibre

## 2.2 Structures statiquement déterminées et indéterminées.

Si nous considérons un corps (structure) arbitraire soumis à l'action d'un système de forces dans l'espace  $x, y, z$  (Figure 2.1), son équilibre d'ensemble peut être défini par les équations d'équilibre statique :

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0 & \Sigma M_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0 & \Sigma M_y &= 0 \\ \Sigma F_z &= 0 & \Sigma M_z &= 0\end{aligned}\quad (2.1)$$

Les sommations se rapportent à toutes les composantes de forces et de moments par rapport aux 3 axes de référence  $x, y, z$ . Nous pouvons donc écrire 6 équations

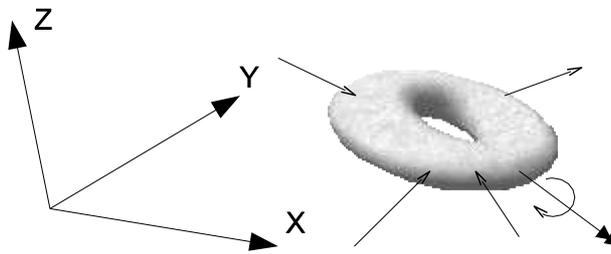


FIG. 2.1 – Corps tridimensionnel soumis à un ensemble de forces

d'équilibre dans le cas général d'un corps tridimensionnel. Lorsque toutes les forces agissent dans le même plan, seules 3 équations d'équilibre sont exploitables. Dans le plan  $0, x, y$  (2.2), ces 3 équations sont :

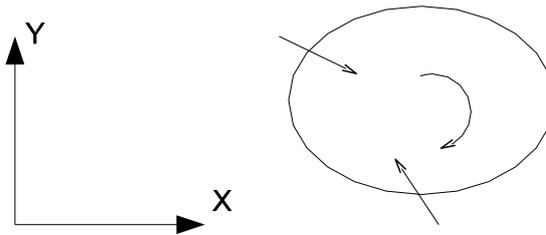


FIG. 2.2 – Problème bidimensionnel

en équilibre) est composée de différentes membrures, les équations de la statique doivent, bien entendu, être satisfaites pour la structure considérée globalement. En outre, chaque barre, chaque noeud d'assemblage et toute portion de la structure doit, forcément, être en équilibre. Cela signifie que les équations de la statique doivent également être satisfaites pour chaque composant, chaque noeud et chaque portion de la structure étudiée. Or l'analyse d'une structure est généralement menée de façon à calculer les efforts de liaison (réactions) et les efforts internes. Donc, si

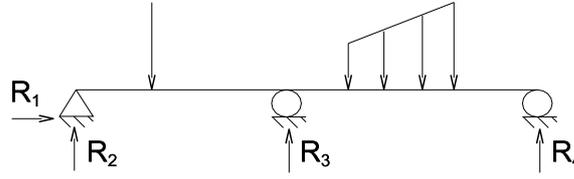
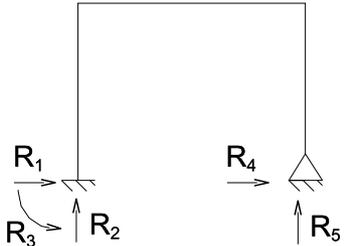
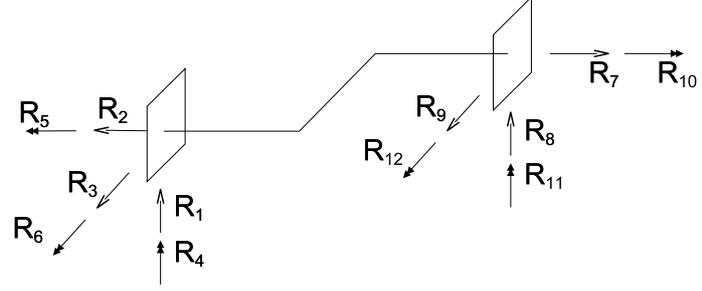
Structure	$l$	$N_e$	$I_e$
	4	3	1
	5	3	2
	12	6	6

FIG. 2.3 – Nombre d’efforts de liaison  $l$ , nombre d’équations d’équilibre  $N_e$ , degré d’hyperstaticité externe  $I_e$

ceux-ci sont accessibles au départ des seules équations d’équilibre de la statique, la structure est dite *statiquement déterminée*, ou encore, isostatique. Si, parcontre, les efforts de liaison et/ou les efforts internes ne sont pas accessibles au départ des équations d’équilibre de la statique, la structure est dite *statiquement indéterminée* ou encore, hyperstatique. On voit donc que cette hyperstaticité peut être imputable à différentes causes. On parlera d’hyperstaticité externe si le nombre d’efforts de liaison (réactions) excède le nombre d’équations d’équilibre. Quelques exemples d’hyperstaticité externe sont repris à la Figure 2.3. Il importe de remarque que certaines structures sont caractérisées par la présence de dispositifs mécaniques garantissant l’annulation de l’un ou l’autre effort interne (Figure 2.4). La présence de ces dispositifs autorise généralement l’écriture d’une équation d’équilibre statique supplémentaire et donc, la détermination d’un effort de liaison additionnel. Par exemple, le cadre articulé ci-dessous (Figure 2.6) est caractérisé par 4 composantes de réaction mais le moment fléchissant  $M$  doit s’annuler au droit de la

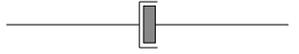
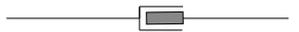
Dispositif	Schéma	Effort libéré
rotule		$M$
glissière tangente		$T$
coulisse normale		$N$
coulisse axiale		$M_T$

FIG. 2.4 – Dispositifs de libération d'efforts

rotule (Figure 2.5). Cette condition vient compléter les 3 équations d'équilibre

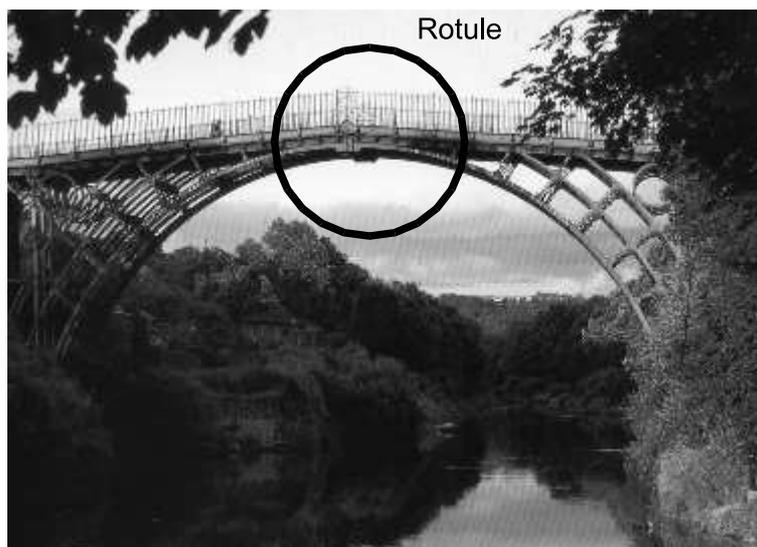


FIG. 2.5 – Rotule sur un pont métallique.

global de la structure. Il en résulte que les 4 composantes de réaction sont statiquement déterminables. L'hyperstaticité peut également être interne. Le degré d'indétermination statique correspondra alors au nombre de coupures à introduire pour ramener le système à l'isostaticité. Chaque coupure correspondra à la suppression d'un effort interne inconnu (moment de flexion, effort tranchant, effort normal, moment de torsion). Physiquement, cette suppression se matérialise par l'introduction d'une rotule ( $M = 0$ ), d'une glissière tangente ( $T = 0$ ), d'une coulisse normale ( $N = 0$ ) ou encore, d'une coulisse axiale ( $M_T = 0$ ). Ces dispositifs peuvent être introduits simultanément au droit d'une même section. S'ils correspondent à l'annulation de tous les efforts internes dans cette section, on par-

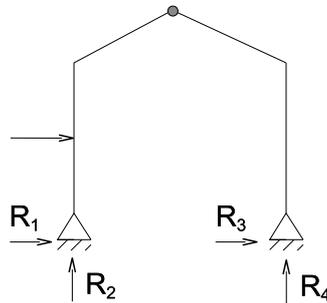
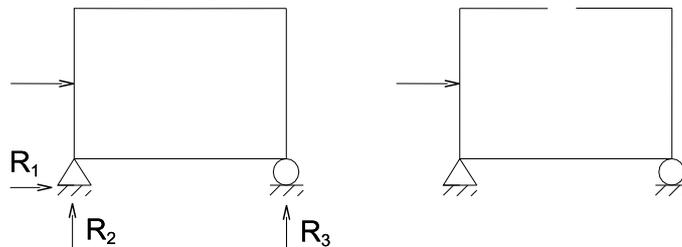


FIG. 2.6 – Cadre articulé

FIG. 2.7 – Cadre hyperstatique (gauche) et introduction d'une coupure i.e. la libération des trois efforts  $M$ ,  $N$  et  $T$  (droite).

lera alors de coupe totale. La coupe représente donc la suppression de  $M$ ,  $T$ ,  $N$  et  $M_T$  (éventuellement) dans la section où elle est pratiquée. Le nombre de suppressions nécessaires pour rendre la structure isostatique représente, bien entendu, le degré d'hyperstaticité.

**Exemple :** le cadre représenté (Figure 2.7) est statiquement indéterminé au 3<sup>ième</sup> degré. En effet, il devient statiquement déterminé si on pratique une coupe dans l'une ou l'autre de ses membrures (horizontales ou verticales). Le même cadre peut, bien entendu, être rendu isostatique en introduisant 3 rotules en 3 sections particulières (à condition que celles-ci ne soient pas alignées sur la même droite) (Figure 2.8). Enfin, certaines structures peuvent être à la fois intérieurement et extérieurement hyperstatiques. C'est le cas du cadre représenté à la Figure 2.9. Ce cadre est extérieurement indéterminé au 1<sup>er</sup> degré. Toutefois, les efforts internes ne peuvent être déterminés par la statique même si toutes les réactions sont supposées connues. Par contre, en introduisant 2 coupes totales comme représenté à la Figure 2.10, on rend possible la détermination des efforts internes au départ des seules équations de la statique. Le cadre est donc intérieurement indéterminé au 6<sup>ième</sup> degré et le degré d'hyperstaticité total vaut 7.

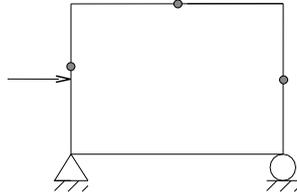


FIG. 2.8 – Structure rendue isostatique par l'introduction de trois rotules.

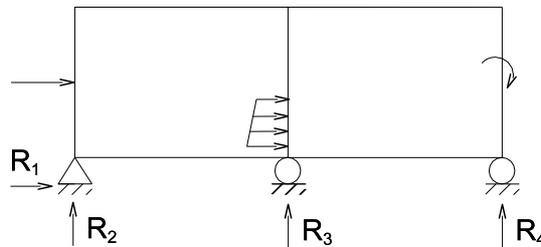


FIG. 2.9 – Cadre hyperstatique.

## 2.3 Évaluation du degré d'hyperstaticité.

On a vu au paragraphe précédent que généralement le degré d'indétermination statique pouvait être déterminé par simple inspection de la structure étudiée ou par évaluation du nombre de coupures à introduire pour ramener la coupure à l'isostaticité. Pour un certain nombre de structures, en particulier celles comprenant un grand nombre de composants, une telle approche peut se révéler particulièrement laborieuse et donc, source d'erreurs. L'utilisation d'une procédure formelle se révèle dès lors préférable. Nous présentons ci-après, deux formules applicables, d'une part aux ossatures planes et, d'autre part, aux ossatures spatiales.

### 2.3.1 Ossatures planes.

#### Etablissement d'une formule brute.

En chaque noeud (rigide) d'assemblage, nous pouvons écrire 3 équations d'équilibre :

- ◇ équilibre de translation horizontale,
- ◇ équilibre de translation verticale,
- ◇ équilibre de rotation.

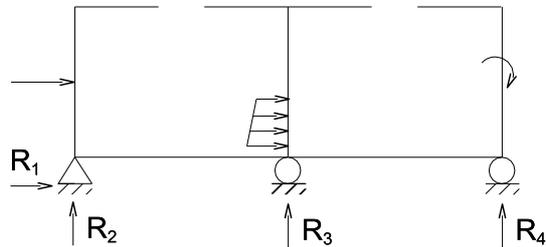


FIG. 2.10 – Introduction de deux coupures totales pour lever l’hyperstaticité interne.

Si nous désignons par  $n$  le nombre total de noeuds, il en résulte que le nombre total d’équations d’équilibre est donné par :

$$N_e = 3n$$

Les inconnues sont constituées par les efforts internes et les efforts de liaison (réactions). Les efforts internes dans une barre quelconque d’ossature peuvent être statiquement déterminés si 3 des 6 efforts d’extrémités  $F_1, F_2, \dots, F_6$  sont connus (Figure 2.11). En désignant par  $b$  le nombre de barres et par  $l$  le nombre d’efforts

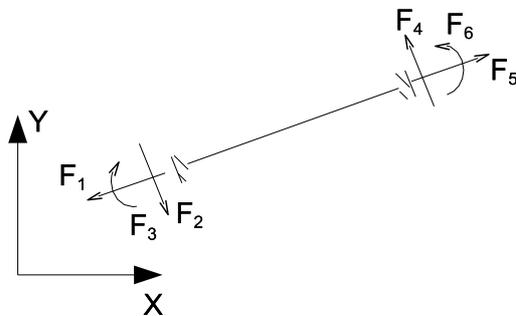


FIG. 2.11 – Élément de poutre plane.

de liaison, le nombre total d’inconnues est donné par :

$$N_i = 3b + l$$

Il en résulte qu’une ossature plane à noeuds rigides est statiquement déterminée si

$$N_e = N_i$$

soit, encore

$$3n = 3b + l$$

avec

- ◇  $n$  = nombre de noeuds
- ◇  $b$  = nombre de barres
- ◇  $l$  = nombre de liaisons externes (réactions)  $\geq 3$  ( $\geq 3$  pour garantir au minimum l'isostaticité externe de la structure étudiée).

Si  $N_i > N_e$  (c.à.d. si  $3b + l > 3n$ ), la structure est statiquement indéterminée et le degré d'indétermination statique  $I_s$  est donné par :

$$I_s = N_i - N_e = (3b + l) - 3n \quad (2.2)$$

### Etablissement d'une formule affinée.

Si un noeud rigide est remplacé par une rotule, le nombre d'équations d'équilibre susceptibles d'être écrites est réduit d'une unité mais les moments fléchissants aux extrémités des barres aboutissant en ce noeud s'annulent aussi ... de sorte que le nombre d'inconnues se trouve réduit du nombre de barres aboutissant en ce noeud. Il importe donc d'en tenir compte et d'affiner en conséquence la formule (2.2).

### Evaluation du nombre d'équations

Le nombre effectif d'équations s'évaluera au moyen de la relation :

$$N_e = 3n - m$$

avec

- ◇  $n$  = nombre de noeuds (les noeuds étant tous les points d'assemblage et d'appui de la structure étudiée),
- ◇  $m$  = nombre d'équations inexploitable du fait de l'identification d'un noeud avec une rotule (imposant la condition  $M = 0$ ), d'une glissière tangente (imposant la condition  $T = 0$ ) ou d'une coulisse normale (imposant la condition  $N = 0$ ).

### Evaluation du nombre d'inconnues

Le nombre effectif d'inconnues s'obtient par application de la relation :

$$N_i = 3b + l - r \quad (2.3)$$

avec

- ◇  $b$  = nombre de barres (les barres étant définies par 2 noeuds extrémité),
- ◇  $l$  = nombre d'efforts de liaison ( $\geq 3$ ) (voir remarque 1 ci-après),
- ◇  $r$  = nombre d'efforts à priori nuls aux extrémités des différentes barres compte tenu de la présence d'une rotule, d'une glissière tangente ou d'une coulisse normale d'extrémité.

**Degré d'indétermination statique**

Compte tenu de ce qui précède, le degré d'indétermination statique s'évaluera comme suit :

$$I_s = N_i - N_e$$

où

$$N_i = 3b + l - r$$

$$N_e = 3n - m$$

**2.3.2 Ossatures spatiales.**

Dans le cas d'une ossature spatiale (Figure 2.12), les relations précédentes prennent la forme suivante :

$$I_s = N_i - N_e$$

où

$$N_i = 6b + l - r$$

$$N_e = 6n - m$$

Dans ces relations,  $n$ ,  $b$  et  $l$  ont la même signification que précédemment. Seules les définitions de  $m$  et  $r$  méritent d'être complétées :

- ◇  $m$  est le nombre d'équations inexploitable du fait de l'identification d'un noeud avec une rotule ( $M = 0$ ), une glissière tangente ( $T = 0$ ), une coulisse normale ( $N = 0$ ) ou une coulisse axiale ( $M_T = 0$ ) ;
- ◇  $r$  est le nombre d'efforts internes à priori nuls aux extrémités des différentes barres compte tenu de la présence d'une rotule, d'une glissière tangente, d'une coulisse normale ou encore, d'une coulisse axiale.

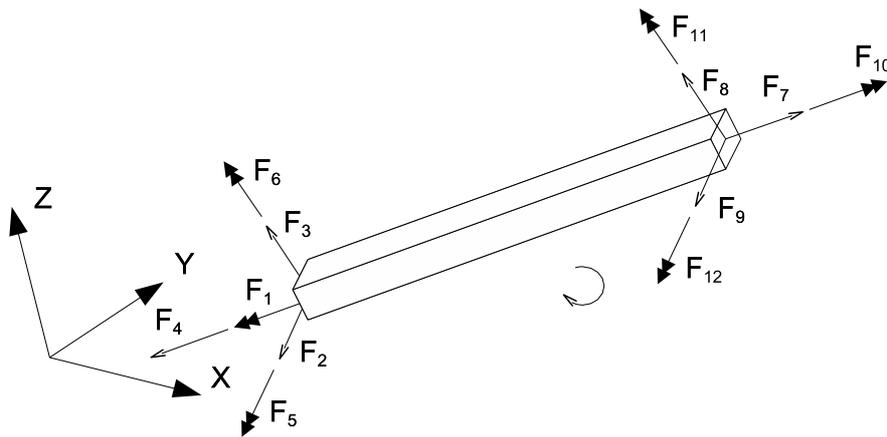


FIG. 2.12 – Élément de poutre d'une ossature spatiale.

### 2.3.3 Remarques importantes.

- 1 Il importe de remarquer que, jusqu'à présent, le degré d'hyperstaticité a été défini sans faire référence aux actions s'exerçant sur la structure étudiée. En ce sens, le degré d'indétermination statique est une propriété géométrique de la structure étudiée : elle résulte en effet exclusivement de sa topologie et des conditions d'appuis. Par ailleurs, toute structure est nécessairement en rapport avec un support (sol, fondations, flotteurs, ...). Ces points d'appui doivent garantir, au minimum l'isostaticité externe de la structure. Dans certains cas toutefois, on peut rencontrer des structures sans points d'appui apparents. Celles-ci doivent être nécessairement soumises à un système de charges en équilibre. Toute structure antérieurement isostatique est d'ailleurs susceptible de se trouver dans cette catégorie : en effet, les liaisons internes pouvant être déterminées au départ des seules équations d'équilibre, rien n'empêche le calculateur de les remplacer, *a priori*, par des forces équivalentes (Figure 2.13). Compte tenu du fait que la détermination de  $I_s$  ne fait pas

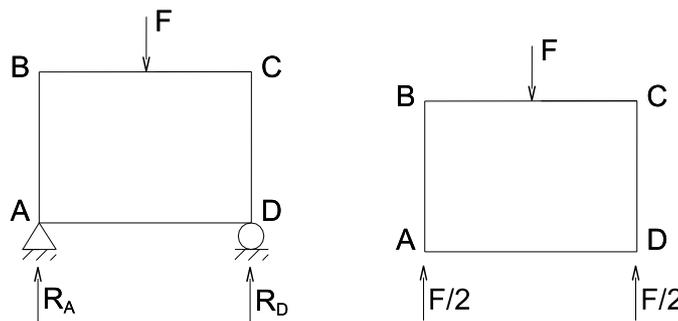


FIG. 2.13 – Structure avec appuis (gauche) et remplacement des appuis par des charges en équilibre avec les forces (droite).

référence au cas de sollicitation envisagé, l'application correcte du degré d'indétermination statique par les formules vues plus haut requiert l'introduction de 3 liaisons extérieures fictives garantissant l'isostaticité externe quelque soit le cas de charge.

- 2 Signalons aussi que la détermination du degré d'indétermination statique s'est fait ici dans le cas général de forces distribuées de façon quelconque sur la structure. Si le système et les sollicitations extérieures sont symétriques ou antisymétriques par rapport à un ou plusieurs axes, le degré effectif d'hyperstaticité <sup>1</sup> peut s'en trouver réduit.

**Exemple** : Un anneau ou un cadre rigide soumis à un système de charges en équilibre (Figure 2.14) est, en général, hyperstatique au degré 3 (voir

<sup>1</sup> on pourrait définir le degré effectif d'hyperstaticité (pour un cas de charge déterminé) comme étant le nombre d'inconnues hyperstatiques dont la détermination exige l'écriture effective des équations de compatibilité.

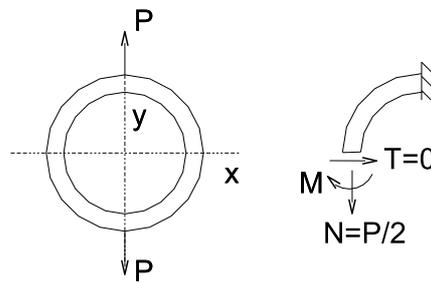


FIG. 2.14 – Anneau rigide soumis à un système de charges en équilibre.

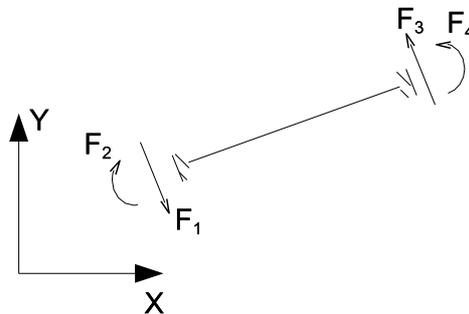


FIG. 2.15 – Poutre sans efforts normaux.

remarque 1 ci-dessus). Cependant, l'anneau représenté ci-dessous n'est, en pratique, qu'une fois hyperstatique car, à cause de l'axe de symétrie  $YY$ , on a  $N = P/2$  et à cause de l'axe de symétrie  $XX$ , on a  $T = 0$  ! La seule inconnue hyperstatique est donc le moment  $M (= X_1)$  au point 0.

- 3 Enfin, dans le cas de poutres continues soumises exclusivement à des actions transversales, les efforts normaux sont a priori nuls. Il en résulte que deux équations d'équilibre peuvent être écrites en chaque noeud. Par ailleurs, les efforts internes ( $M$  et  $T$ ) dans un élément quelconque de la poutre peuvent être déterminés si 2 des 4 efforts d'extrémités sont connus (2.15) Les relations permettant de calculer le degré d'indétermination statique prennent alors la forme :

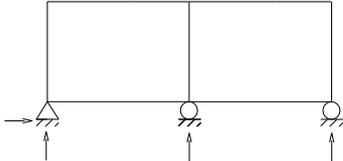
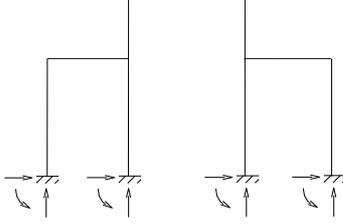
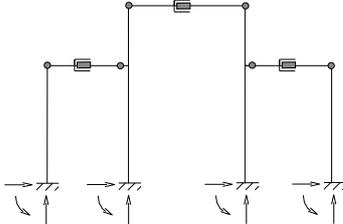
$$I_s = N_i - N_e$$

avec

$$N_e = 2n - m$$

$$N_i = 2b + l - r$$

**2.3.4 Exemples.**

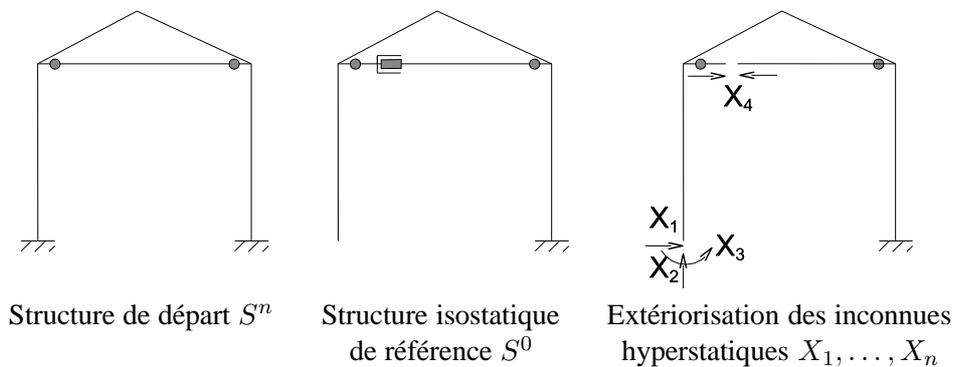
	$n$	$m$	$N_e$	$b$	$l$	$r$	$N_i$	$I_s$
	6	0	18	7	4	0	25	7
	10	0	30	9	12	0	39	9
	13	7	32	12	12	16	32	0

**2.4 Principe de la méthode des Coupures.**

**2.4.1 Système isostatique de référence.**

En déterminant le degré d'hyperstaticité d'une structure, nous sommes à même de préciser le nombre de coupures <sup>2</sup> à pratiquer pour la ramener à l'isostaticité. Il importera, pour la suite du calcul, de choisir une structure isostatique de référence  $S^0$  qui servira de base à l'étude. Remarquons toutefois qu'il existe autant de structures isostatiques de référence que l'on veut car on peut pratiquer les coupures simples arbitrairement. Il est vital toutefois de ne pas transformer le système structural en mécanisme ! On verra par la suite que le choix d'un système isostatique de référence plutôt qu'un autre peut avoir une répercussion sur la simplicité des calculs à effectuer. Nous tâcherons de préciser quelques règles générales permettant de choisir au mieux le système statiquement déterminé de référence.

<sup>2</sup>Le terme *coupure* est pris au sens large : il s'agit chaque fois d'une suppression d'un effort interne ou d'un effort de liaison.



### 2.4.2 Inconnues hyperstatiques.

Chaque fois que nous pratiquons une coupure dans le système hyperstatique de départ, nous supprimons l'effort interne ou de liaison  $X_j$  correspondant. Ainsi, l'introduction d'une rotule conduit à la suppression du moment fléchissant tandis que la suppression d'un appui mobile conduit à l'annulation d'une réaction perpendiculaire au chemin de roulement. La méthode des forces a précisément comme but de déterminer ces  $n$  forces inconnues (si  $n$  désigne le degré d'hyperstaticité). Les inconnues hyperstatiques  $X_j$  sont généralement représentées sous une forme extériorisée sur la structure isostatique de référence.

**Exemple :** Les coupures pratiquées pour obtenir le système isostatique de référence pouvant être tant internes qu'externes au système, il doit être bien entendu, dans tout ce chapitre, que les mots *force* et *déplacement* sont pris au sens généralisé. Le symbole  $X_j$  peut donc correspondre à une force ordinaire, une paire de forces égales et opposées, un moment ou une paire de moments égaux et opposés tandis que le *déplacement* associé correspond à la *force* ci-dessus c.à.d., selon le cas, un déplacement projeté, un déplacement relatif projeté, une rotation projetée sur l'axe du couple ou, enfin, une rotation relative projetée sur l'axe commun des deux couples.

### 2.4.3 Equations générales de la méthode des forces.

Considérons une structure hyperstatique de degré  $n$  ( $S^n$ ) et la structure isostatique de référence ( $S^0$ ) qui lui est associée. Soient  $X_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) les  $n$  inconnues hyperstatiques. Imaginons que la structure isostatique de référence  $S^0$  soit soumise à l'action des forces extérieures ( $\Sigma P$ ) et des forces  $X_j$  momentanément inconnues ( $j = 1, \dots, n$ ). La réponse structurale de ce système s'obtient, en vertu du principe de superposition, en évaluant séparément les réponses élémentaires du système  $S^0$  soumis successivement aux charges extérieures ( $\Sigma P$ ) et aux efforts  $X_j$  puis en sommant celles-ci. (Fig 2.16). Si nous nous intéressons au déplacement relatif des 2 lèvres d'une coupure arbitraire  $i$ , nous constatons qu'il se compose, en

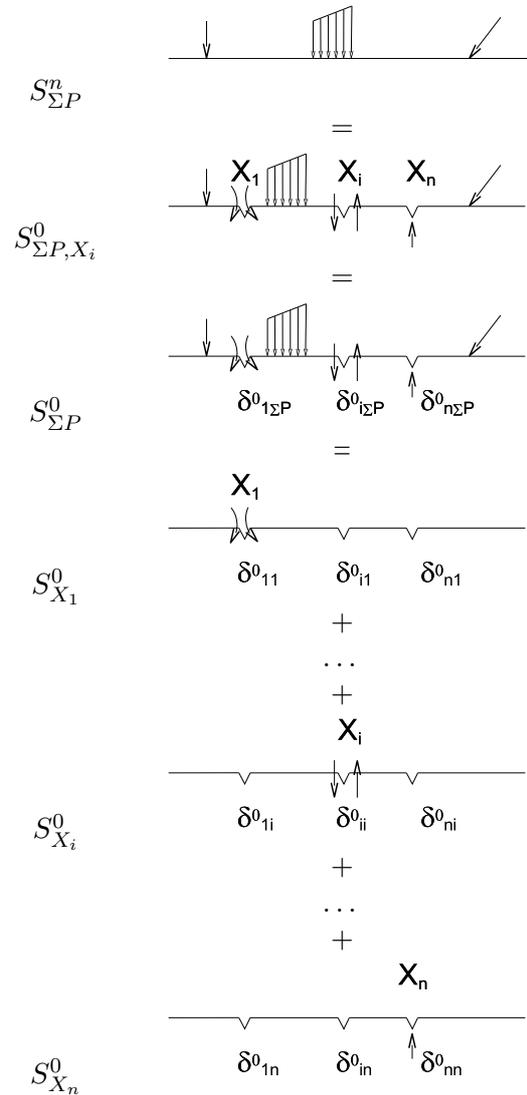


FIG. 2.16 – Décomposition de la structure.

vertu du principe de superposition, des déplacements produits par chaque force  $X_j$  du déplacement produit par les forces extérieures  $\Sigma P$ . Si on désigne par :

- $\delta_{ij}^0$  le déplacement relatif (dans  $S^0$ ) des lèvres de la coupure  $I$  (dans la direction  $i$ ) d à une force unité agissant dans la coupure  $j$  (dans la direction  $j$ )
- $\delta_{i\Sigma P}^0$  le déplacement relatif (dans  $S^0$ ) des lèvres de la coupure  $I$  (dans la direction  $i$ ) produit par les forces extérieures  $\Sigma P$

alors, le déplacement total  $S_i$  vaut :

$$\delta_{i\Sigma P}^n = \sum_{j=1}^n \delta_{ij}^0 X_j + \delta_{i\Sigma P}^0 \quad (2.4)$$

L'objectif consiste à déterminer les efforts  $X_j$  tels qu'ils existent réellement dans la structure hyperstatique de départ. Nous cherchons donc à proportionner ces efforts de façon à ce qu'ils garantissent bien une déformée cinématiquement admissible (c.à.d. continue et satisfaisant aux conditions frontières géométriques) ou encore, compatible.

Sans ces conditions, la superposition d'effets que traduit l'équation (2.4) fournira bien le déplacement relatif  $\delta_{i\Sigma P}^n$  des lèvres de la coupure  $i$  sans l'effet des forces extérieures dans le système hyperstatique de départ. On a donc bien :

$$\delta_{i\Sigma P}^n = \sum_{j=1}^n \delta_{ij}^0 X_j + \delta_{i\Sigma P}^0 \quad (2.5)$$

pour  $i = 1, \dots, n$  Soit un système de  $n$  équations linéaires à  $n$  inconnues (les  $X_j$ ). Ces équations sont les équations générales de la méthode des forces. Elles représentent les équations de compatibilité des déplacements relatifs aux  $n$  coupures simples pratiquées. Remarquons que les termes  $\delta_{i\Sigma P}^n$  ( $i = 1, \dots, n$ ) sont généralement nuls car, au droit des coupures pratiquées le système hyperstatique se caractérise habituellement par une continuité matérielle qui exclut tout déplacement relatif. Par contre, si la coupure  $i$  correspond à la suppression d'un effort de liaison externe (suppression d'une réaction verticale par exemple) alors, le terme correspondant  $\delta_{i\Sigma P}^n$  représente le déplacement (vertical dans ce cas) du point d'appui dans le système hyperstatique étudié. Le calculateur peut, effectivement, être amené à investiguer l'effet de mouvements d'appui (tassement, ) dans un système hyperstatique. On aura l'occasion d'en reparler au point 9. Les relations (2.5) peuvent également s'écrire sous forme matricielle avec :

$$[\delta^0] \cdot (X) = (\delta_{\Sigma P}^n) - (\delta_{\Sigma P}^0) \quad (2.6)$$

$$[\delta^0] \leftarrow \delta_{ij}^0 \quad (2.7)$$

$$(\delta_{\Sigma P}^n) \leftarrow \delta_{i\Sigma P}^n \quad (2.8)$$

$$(\delta_{\Sigma P}^0) \leftarrow \delta_{i\Sigma P}^0 \quad (2.9)$$

La résolution de ce système linéaire fournira les inconnues  $X_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Celles-ci étant déterminées, le problème hyperstatique est résolu : par superposition des cas élémentaires, on obtient sans peine les efforts internes en tout point de la structure de départ :

$$M_{s\Sigma P}^n = M_{s\Sigma P}^0 + \sum_{j=1}^n m_{sj}^0 X_j \quad (2.10)$$

$$T_{s\Sigma P}^n = T_{s\Sigma P}^0 + \sum_{j=1}^n t_{sj}^0 X_j \quad (2.11)$$

$$N_{s\Sigma P}^n = N_{s\Sigma P}^0 + \sum_{j=1}^n n_{sj}^0 X_j \quad (2.12)$$

Disposant ainsi des diagrammes de déformation, on est à même d'évaluer l'état de déplacement en tout point de la structure étudiée en utilisant, par exemple, le théorème de la force unité ou le second théorème de Castigliano [7] (puisque la structure est supposée élastique linéaire).

#### 2.4.4 Calcul des coefficients $\delta_{ij}^0$ et $\delta_{i\Sigma P}^0$ .

$\delta_{ij}^0$  désigne le déplacement relatif des lèvres de la coupure  $i$  (dans la direction  $i$ ) dû à une force unité agissant dans la coupure  $j$  (dans la direction  $j$ ). Ce coefficient est donc un coefficient de flexibilité.

On peut le calculer aisément par le théorème de la force unité [7]. Dans le cas d'une structure plane formée de barres,  $\delta_{ij}^0$  s'évalue par la relation

$$\delta_{ij}^0 = \int_0^s \frac{m_{si}^0 m_{sj}^0}{EI_s} ds + \int_0^s \frac{n_{si}^0 n_{sj}^0}{EA_s} ds + \int_0^s \frac{t_{si}^0 t_{sj}^0}{GA_s^1} ds \quad (2.13)$$

où  $m_{si}^0, n_{si}^0, t_{si}^0$  sont les efforts internes courants dus à une force unité agissant dans la coupure  $i$ , et  $m_{sj}^0, n_{sj}^0, t_{sj}^0$  sont les efforts internes courants dû à une force unité agissant dans la coupure  $j$ . On voit immédiatement que les coefficients  $\delta_{ij}^0$  jouissent de la propriété suivante :

$$\delta_{ij}^0 = \delta_{ji}^0 \quad (2.14)$$

qui n'est qu'une forme particulière du théorème de réciprocité de Maxwell [7]. De même,  $\delta_{i\Sigma P}^0$  représente le déplacement relatif des lèvres de la coupure  $i$  (dans la direction  $i$ ) suite à l'application des forces extérieures. A nouveau,  $\delta_{i\Sigma P}^0$  s'évalue par application du théorème de la force unité :

$$\delta_{i\Sigma P}^0 = \int_0^s \frac{m_{si}^0 M_{s\Sigma P}^0}{EI_s} ds + \int_0^s \frac{n_{si}^0 N_{s\Sigma P}^0}{EA_s} ds + \int_0^s \frac{t_{si}^0 t_{s\Sigma P}^0}{GA_s^1} ds \quad (2.15)$$

où  $M_{s\Sigma P}^0, N_{s\Sigma P}^0, T_{s\Sigma P}^0$  désignent les efforts internes courants produits par les forces extérieures ( $\Sigma P$ ) dans le système isostatique de référence. Dans le cas d'une structure en treillis, les expressions précédentes deviennent :

$$\delta_{ij}^0 = \sum \frac{n_{si}^0 n_{sj}^0 l}{EA_s} \quad (2.16)$$

$$\delta_{i\Sigma P}^0 = \sum \frac{n_{si}^0 N_{s\Sigma P}^0 l}{EA_s} \quad (2.17)$$

où la somme s'étend à toutes les barres composant le treillis.



FIG. 2.17 – Ponts bowstring

## 2.5 Détermination des coefficients $\delta_{ij}^0$ et $\delta_{i\Sigma P}^0$ .

### 2.5.1 Hypothèses simplificatrices.

En pratique, lorsqu'on analyse des poutres essentiellement fléchies, on néglige habituellement les déformations dues à l'effort tranchant et à l'effort normal sauf pour certaines constructions particulières (arcs très surbaissés par exemple). Toutefois, il importera de ne pas négliger les déformations dues à l'effort normal dans les barres de type *treillis* (tendeurs, suspentes, tirants ...) que l'on trouve fréquemment incorporés dans des assemblages de poutres (Figure 2.17, toitures haubanées par exemple). Hormis ces quelques cas particuliers, l'évaluation des coefficients  $\delta_{ij}^0$  et  $\delta_{i\Sigma P}^0$  reposera sur les formules :

$$\delta_{ij}^0 = \int_0^s \frac{m_{si}^0 m_{sj}^0}{EI_s} ds \quad (2.18)$$

$$\delta_{i\Sigma P}^0 = \int_0^s \frac{m_{si}^0 M_{s\Sigma P}^0}{EI_s} ds \quad (2.19)$$

Dans le cas d'ossatures spatiales, l'évaluation concrète des coefficients  $\delta_{ij}^0$  et  $\delta_{i\Sigma P}^0$  requiert généralement la prise en compte des deux moments de flexion, du moment de torsion et, éventuellement, de l'effort normal :

$$\delta_{ij}^0 = \int_0^s \frac{m_{xsi}^0 m_{xsj}^0}{EI_{xs}} ds + \int_0^s \frac{m_{ysi}^0 m_{zsj}^0}{EI_{ys}} ds + \int_0^s \frac{m_{t si}^0 m_{t sj}^0}{GJ_s} ds + \int_0^s \frac{n_{\alpha i}^0 n_{\alpha j}^0}{EA_s} ds \quad (2.20)$$

### 2.5.2 La convention de signe.

La formulation du problème linéaire repose essentiellement sur l'évaluation des coefficients  $\delta_{ij}^0$  et  $\delta_{i\Sigma P}^0$ . Les intégrales correspondantes faisant intervenir chaque fois le produit de deux efforts internes sont dès lors indépendantes de la convention de signe adoptée car si on inverse cette convention, les deux termes du produit

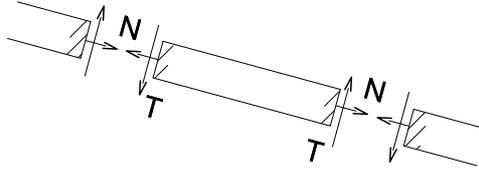


FIG. 2.18 – Convention de signe. Traction  $N > 0$ , Compression  $N < 0$ , Rotation dans le sens horlogique  $T > 0$ , rotation anti-horlogique  $T < 0$

changent simultanément de signe et le signe du produit reste donc inchangé. Il est donc inutile de donner un signe + ou - aux efforts internes tout au moins en ce qui concerne l'évaluation des  $\delta_{ij}^0$  et  $\delta_{i\Sigma P}^0$  : il suffit de pouvoir discerner, rapidement et sans ambiguïté, les efforts internes de même sens et ceux de sens opposés. A cet effet, on adopte généralement la convention suivante pour le trace des diagrammes des moments ( $M_{s\Sigma P}^0, m_{s1}^0, \dots, m_{sn}^0$ ) : le diagramme des moments fléchissants est construit en reportant les moments du côté de la fibre tendue. Lors de l'évaluation des coefficients  $\delta_{ij}^0$ , il est alors évident que les moments reportés d'un même côté d'une barre sont de même sens alors que ceux reportés de part et d'autre sont de sens opposés. Enfin, dans le diagramme final des moments (obtenus par superposition), la position de la courbe des moments par rapport à la barre détermine immédiatement la fibre tendue et la fibre comprimée. Remarquons qu'il n'existe pas de convention de représentation pour les efforts normaux et les efforts tranchants. On prendra dès lors la précaution d'appliquer la convention de signe décrite sur la Figure 2.18.

En ce qui concerne le moment de torsion, on peut adopter la convention suivante :

FIGURE 5.2

On représente donc l'action sur les noeuds.

### 2.5.3 Inertie constante par tronçons.

Habituellement, les moments d'inertie sont constants par tronçons. Si on désigne par  $l_k$  et  $I_k$  les longueurs et inerties des différents tronçons composant le système structural, on peut écrire

$$\delta_{ij}^0 = \sum_k \frac{1}{EI_k} \int_0^{l_k} m_{si}^0 m_{sj}^0 ds \quad (2.21)$$

$$\delta_{i\Sigma P}^0 = \sum_k \frac{1}{EI_k} \int_0^{l_k} m_{si}^0 M_{s\Sigma P}^0 ds \quad (2.22)$$

où la somme porte sur les divers tronçons du système. Les intégrales peuvent être évaluées à l'aide des expressions analytiques des moments.

**2.5.4 Evaluation des intégrales du type  $\int m_{si}^0 m_{sj}^0 ds$  par l'emploi de tableaux.**

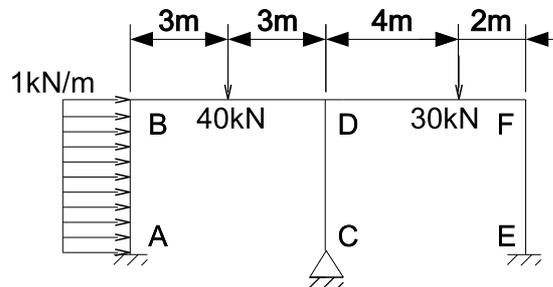
Dans les applications numériques habituelles, les moments  $m_{si}^0, m_{sj}^0, M_{s\Sigma P}^0$  varient selon une loi du 1er, 2ème ou, plus rarement, du 3ème degré. Il en résulte que l'on peut alléger considérablement les calculs si l'on dispose de tableaux donnant les valeurs calculées de ces intégrales pour les formes courantes du diagramme des moments. Le lecteur trouvera dans le tableau 2.19 un tel tableau qui se révèlera satisfaisant pour la suite.

**2.5.5 Inertie variable.**

Lorsque l'inertie varie, l'évaluation des coefficients  $\delta_{ij}^0$  par voie analytique peut se révéler particulièrement laborieuse. Dans ces conditions, les méthodes d'intégration numériques se révèlent beaucoup plus attractives. La méthode des trapèzes et, mieux encore, la méthode de Simpson sont généralement utilisées dans ce cas [?].

**2.6 Exemple d'application.**

On désire calculer les efforts internes et les réactions d'appui dans la structure suivante :



$S_{\Sigma P}^n =$

a) Détermination du degré d'hyperstaticité :

$n = 6$

$\implies N_e = 3n - m = 17$

$m = 1$

$\implies I_s = 5$

$b = 5$

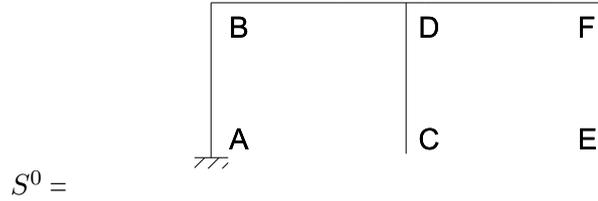
$l = 8 \implies N_i = 3b + l - r = 22$

$r = 1$

b) Choix d'un système isostatique de référence. Supprimons l'appui fixe C (2 efforts de liaison) et l'encastrement E (3 efforts de liaison). On a donc

	$M_i M_j$	$\frac{1}{2} M_i M_j$
	$\frac{1}{2} M_i M_j$	$\frac{1}{3} M_i M_j$
	$\frac{1}{2} M_i M_j$	$\frac{1}{6} M_i M_j$
	$\frac{1}{2} M_i M_j$	$\frac{1}{6} M_i M_j (2 - \frac{x}{L})$
	$\frac{1}{2} M_i (M_j + M_j')$	$\frac{1}{6} M_i (2M_j + M_j')$
	$\frac{1}{3} M_i M_j$	$\frac{1}{4} M_i M_j$
	$\frac{1}{3} M_i M_j$	$\frac{1}{12} M_i M_j$
	$\frac{2}{3} M_i M_j$	$\frac{1}{3} M_i M_j$
	$\frac{2}{3} M_i M_j$	$\frac{1}{4} M_i M_j$
	$\frac{2}{3} M_i M_j$	$\frac{5}{12} M_i M_j$

FIG. 2.19 – Tableau des intégrales de Mohr  $\frac{1}{L} \int_0^L M_i M_j ds$



## 2.7 Etablissement directe des équations de compatibilité.

L'objet de ce paragraphe est de montrer que l'on peut établir directement n'importe quelle équation de compatibilité à l'aide du théorème de la force unité. Illustrons-le en considérant la poutre continue représentée à la REFERENCE FIG 7.1. Nous souhaitons établir directement l'équation de compatibilité relative à la  $i$ ème coupure. Celle-ci est supposée s'identifier à la suppression d'un appui intermédiaire.

FIGURE 7.1

L'équation de compatibilité dont il est question doit simplement exprimer l'existence d'un déplacement imposé  $\delta_{i\Sigma P}^n$  au droit de cet appui dans le système hyperstatique de départ soumis aux charges extérieures. Ce déplacement imposé  $\delta_{i\Sigma P}^n$  est généralement nul. Il peut toutefois être différent de 0 si nous souhaitons investiguer l'effet d'un tassement d'appui par exemple. Or, précisément, le théorème de la force unité nous permet de calculer ce déplacement en intégrant, sur le volume de la structure étudiée, les déformations généralisées réelles (courbures, allongement, glissement) multipliées par les contraintes généralisées (moment fléchissant, effort normal, effort tranchant) équilibrant statiquement une force unité correspondant au déplacement cherché. Mais il convient de souligner que les contraintes généralisées dont il est question ci-dessus ne doivent satisfaire que les équations d'équilibre. Il en résulte que le champ des contraintes généralisées produits par la force unité peut-être déterminé dans la structure isostatique de référence la plus simple. Quant à l'état de déformation dont il est question ci-dessus, c'est bien entendu l'état de déformation réel du système hyperstatique. On a donc

$$\delta_{i\Sigma P}^n = \int \left( \frac{M_{s\Sigma P}^n}{EI_s} \right) m_{si}^0 ds + \int \left( \frac{N_{s\Sigma P}^n}{EA_s} \right) n_{si}^0 ds + \int \left( \frac{T_{s\Sigma P}^n}{GA_s^1} \right) t_{si}^0 ds \quad (2.23)$$

où  $m_{si}^0$ ,  $n_{si}^0$ ,  $t_{si}^0$  sont les efforts internes (dans un système isostatique de référence) dus à un effort unité appliqué dans la coupure  $i$ , et  $\left( \frac{M_{s\Sigma P}^n}{EI_s} \right)$ ,  $\left( \frac{N_{s\Sigma P}^n}{EA_s} \right)$ ,  $\left( \frac{T_{s\Sigma P}^n}{GA_s^1} \right)$  sont les déformations généralisées (dans le système hyperstatique) dues aux charges extérieures. Par ailleurs, l'état de déformation réel est identique à celui provoqué dans le système  $S^0$  par l'ensemble des forces extérieures ( $\Sigma P$ ) et des inconnues

hyperstatiques  $(X_1, \dots, X_n)$ . D'après le principe de superposition, on a donc

$$M_{s\Sigma P}^n = M_{s\Sigma P}^0 + \sum_{j=1}^n m_{sj}^0 X_j \quad (2.24)$$

$$T_{s\Sigma P}^n = T_{s\Sigma P}^0 + \sum_{j=1}^n t_{sj}^0 X_j \quad (2.25)$$

$$N_{s\Sigma P}^n = N_{s\Sigma P}^0 + \sum_{j=1}^n n_{sj}^0 X_j \quad (2.26)$$

En remplaçant, dans l'équation (2.23),  $M_{s\Sigma P}^n$ ,  $N_{s\Sigma P}^n$  et  $T_{s\Sigma P}^n$  par les expressions ci-dessus, on obtient, après regroupement des termes,

$$\begin{aligned} \delta_{i\Sigma P}^n = & \int \frac{m_{si}^0 (M_{s\Sigma P}^0 + \sum_j m_{sj}^0 X_j)}{EI_s} ds + \\ & \int \frac{n_{si}^0 (N_{s\Sigma P}^0 + \sum_j n_{sj}^0 X_j)}{EA_s} ds + \int \frac{t_{si}^0 (T_{s\Sigma P}^0 + \sum_j t_{sj}^0 X_j)}{GA_s^1} ds \end{aligned} \quad (2.27)$$

soit, compte tenu des notations définies antérieurement,

$$\delta_{i\Sigma P}^n = \delta_{i\Sigma P}^0 + \sum_{j=1}^n \delta_{ij}^0 X_j \quad (2.28)$$

qui n'est autre que l'équation (2.5).

## 2.8 Liaison avec le principe du travail minimum.

L'énoncé du principe du travail minimum est le suivant : "Les valeurs des efforts redondants qui se produisent réellement dans une structure élastique linéaire rendent minimum son énergie interne." Soit, en désignant par  $U$  l'énergie interne emmagasinée dans la structure étudiée et par  $X_j$  les efforts redondants ( $j = 1, \dots, n$ ) :

$$\frac{\partial U}{\partial X_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.29)$$

Montrons que les équations (2.29) ci-dessus ne sont, en fait, rien d'autre que les équations de compatibilité établies ci-avant. L'énergie interne peut se mettre sous la forme

$$U = \int \frac{(M_{s\Sigma P}^n)^2}{2EI_s} ds + \int \frac{(N_{s\Sigma P}^n)^2}{2EA_s} ds + \int \frac{(T_{s\Sigma P}^n)^2}{2GA_s^1} ds \quad (2.30)$$

où  $M_{s\Sigma P}^n$ ,  $N_{s\Sigma P}^n$  et  $T_{s\Sigma P}^n$  sont les efforts internes qui se développent réellement dans la structure hyperstatique de départ. À nouveau, ces efforts résultent du principe de superposition

$$M_{s\Sigma P}^n = M_{s\Sigma P}^0 + \sum_j m_{sj}^0 X_j \quad (2.31)$$